1 Lineare Gleichungen

Das Lösen linearer Gleichungen ist eine wichtige Rechenfertigkeit, die immer wieder gefordert wird und für den Mathematikunterricht in der Fachoberschule unerlässlich ist.

? *Was sind lineare Gleichungen?*

Definition: Gleichungen der Form $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$) oder solche, die durch äquivalentes Umformen in diese Form überführt werden können, heißen **lineare Gleichungen**. Die Lösungsvariable (meist x) kommt also nur in der ersten Potenz vor. (D. h.: in der Gleichung bleiben keine x^2, x^3, … übrig.)

? *Wie kann man lineare Gleichungen lösen?*

Beim kalkülmäßigen Lösen von Gleichungen verfolgt man die Strategie, die Gleichung so umzuformen, dass die Variable allein auf einer Seite der Gleichung steht. Dazu sind gegebenenfalls folgende Schritte auszuführen:

- Klammern auflösen (Dazu finden Sie am Ende dieses Abschnitts Erklärungen)
- Auf jeder der beiden Seiten der Gleichung ordnen und zusammenfassen
- Variablen auf eine Seite der Gleichung bringen
- Variable isolieren

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
4x - (2 - 6x) &= -2(3x - 5) + 14x && | \text{ Klammern auflösen} \\
4x - 2 + 6x &= -6x + 10 + 14x && | \text{ ordnen und zusammenfassen} \\
10x - 2 &= 8x + 10 && | -8x; +2 \text{ (Variable auf eine Seite bringen)} \\
2x &= 12 && | :2 \text{ (Variable isolieren)} \\
x &= 6 \\
L &= \{6\}
\end{aligned}
$$

Probe: linke Seite: $4 \cdot 6 - (2 - 6 \cdot 6) = 24 - (-34) = 58$

rechte Seite: $-2(3 \cdot 6 - 5) + 14 \cdot 6 = -26 + 84 = 58$

Vergleich: $58 = 58$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{6} &= 26 && | \cdot 60 \text{ (Hauptnenner)} \\
15x - 12x + 10x &= 26 \cdot 60 && | \text{ zusammenfassen} \\
13x &= 26 \cdot 60 && | :13 \text{ (Variable isolieren)} \\
x &= \frac{26 \cdot 60}{13} && | \text{ kürzen} \\
x &= 120 \\
L &= \{120\}
\end{aligned}
$$

Probe: linke Seite: $\frac{120}{4} - \frac{120}{5} + \frac{120}{6} = 30 - 24 + 20 = 26$

rechte Seite: 26

Vergleich: $26 = 26$

Beispiel 3:

$$
\begin{aligned}
\frac{3{,}5}{x} - 2 &= 3 && | +2 \\
\frac{3{,}5}{x} &= 5 && | \cdot x \ (x \neq 0) \\
3{,}5 &= 5x && | :5 \text{ (Variable isolieren)} \\
0{,}7 &= x \\
L &= \{0{,}7\}
\end{aligned}
$$

Probe: linke Seite: $\frac{3{,}5}{0{,}7} - 2 = \frac{35}{7} - 2 = 5 - 2 = 3$

rechte Seite: 3

Vergleich: $3 = 3$

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 1

Lösen von Parametergleichungen

Parametergleichungen enthalten neben der gesuchten Größe x noch weitere Variable, sogenannte Parameter. Diese stehen für bekannte, im bestimmten Fall durch Zahlen ersetzbare Größen. Man behandelt sie wie Zahlen!

Beispiel:

$a + 3b(2x + 5) + 2a(3 + 4x)$	=	$ax + 10b$	Klammern auflösen
$a + 6bx + 15b + 6a + 8ax$	=	$ax + 10b$	ordnen und zusammenfassen
$6bx + 15b + 7a + 8ax$	=	$ax + 10b$	-ax; -15b; -7a (Variable x auf eine Seite bringen)
$6bx + 7ax$	=	$-5b - 7a$	x ausklammern
$x(6b + 7a)$	=	$-5b - 7a$	: (6b + 7a) (Variable isolieren)
x	=	$\frac{-5b - 7a}{6b + 7a}$	(wobei $6b + 7a \neq 0$)

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 1

? Exkurs: *Wie rechnet man mit Klammern?*

1. Auflösen von Klammern

   Regel:
   $a + (b + c) = a + b + c$
   $a - (b + c) = a - b - c$
   $a + (b - c) = a + b - c$
   $a - (b - c) = a - b + c$

   Beispiel:
   $a + 4b - ((a + b) + (a - b) - (2a + 2c))$
   $= a + 4b - (a + b + a - b - 2a - 2c)$
   $= a + 4b - (- 2c)$
   $= a + 4b + 2c$

   Merke: Bei ineinandergeschachtelten Klammern löst man immer zuerst die innerste Klammer auf.

2. Multiplikation einer Klammer mit einer Zahl

   Regel: $a(b + c) = ab + ac$
   Jedes Glied der Kammer wird multipliziert.

   Beispiel: $3(x - 2y + 4z) = 3x - 6y + 12z$

3. Multiplikation von zwei Klammern

   Regel: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
   Jedes Glied der 1. Klammer wird mit jedem Glied der 2. Klammer multipliziert.

   Beispiel:
   $(2x + 3y)(4x - 7y)$
   $= 8x^2 - 14xy + 12xy - 21y^2$
   $= 8x^2 - 2xy - 21y^2$

Spezialfälle: **Die 3 binomischen Formeln:**

	Formel	Beispiel
1. binomische F.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(4x + 3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$
2. binomische F.	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4x - 3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$
3. binomische F.	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(4x + 3y)(4x - 3y) = 16x^2 - 9y^2$

2 Bruchgleichungen

? *Was sind Bruchgleichungen?*

Definition: Ein Term wird genau dann Bruchterm genannt, wenn sein Nenner eine Variable enthält.
Eine Gleichung wird genau dann **Bruchgleichung** genannt, wenn sie mindestens einen Bruchterm enthält.

Beispiele:

Bruchterme: $\frac{2}{5-y}$; $\frac{3b}{x(x+2)}$

Bruchgleichungen: $\frac{24}{x+5} = 8$; $\frac{x+5}{2x} = 4$

? ☝ *Was ist bei Bruchgleichungen zu beachten?*

Bei Bruchtermen dürfen nur solche Zahlen oder Größen für Variablen eingesetzt werden, für die der Wert des Terms im Nenner ungleich 0 ist. (Durch 0 darf man nämlich nicht teilen!)
Diese Einsetzungen bilden die **Definitionsmenge** des Bruchterms.

Beispiele:

$\frac{2}{5-y}$ $(y \in R)$ Für y = 5 wird der Nenner 0. Die Definitionsmenge umfasst alle reellen Zahlen außer 5: D = R\{5}

$\frac{3b}{x(x+2)}$ $(x \in R)$ Für x = 0 und für x = -2 wird der Nenner 0. Die Definitionsmenge umfasst alle reellen Zahlen außer 0 und (-2): D = R\{0; -2}

? *Wie kann man Bruchgleichungen lösen?*

Beim Lösen von Bruchgleichungen müssen die Brüche zuerst umgeformt werden, um „bruchfreie" Gleichungen zu erhalten.
Bruchgleichungen werden folgendermaßen gelöst:

1. Der Definitionsbereich wird festgelegt.
2. Beide Seiten der Bruchgleichung werden mit dem Hauptnenner multipliziert. (Dazu finden Sie am Ende dieses Abschnitts nähere Erklärungen)
3. Auf beiden Seiten werden die Brüche gekürzt.
4. Die neue Gleichung wird mit den bekannten Umformungsschritten gelöst.
5. Es muss geprüft werden, ob die Lösung der neuen Gleichung auch zur Definitionsmenge der Bruchgleichung gehört.

Beispiel 1:

$$\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x} = 1{,}75$$

$D = R\backslash\{0\}$ Definitionsbereich festlegen

$$\frac{5}{2x} - \frac{3}{4x} = 1{,}75 \quad | \cdot 4x \text{ (Hauptnenner)}$$

$$\frac{5 \cdot 4x}{2x} - \frac{3 \cdot 4x}{4x} = 1{,}75 \cdot 4x \quad | \text{ kürzen}$$

$$10 - 3 = 7x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$7 = 7x \quad | :7$$

$$1 = x$$

$$L = \{1\}$$

Der Wert für x gehört zur Definitionsmenge.

Beispiel 2:

$$\frac{x+5}{6x+18} + \frac{3x+4}{3x+9} = \frac{2x+11}{9x+27}$$

$D = R\backslash\{-3\}$ Definitionsbereich festlegen

$$
\begin{aligned}
\frac{x + 5}{6x + 18} + \frac{3x + 4}{3x + 9} &= \frac{2x + 11}{9x + 27} && \left|\ \text{Den Nenner in Faktoren zerlegen}\right. \\
\frac{x + 5}{6(x + 3)} + \frac{3x + 4}{3(x + 3)} &= \frac{2x + 11}{9(x + 3)} && \left|\ \cdot\ 18(x + 3)\ \text{(Hauptnenner)}\right. \\
\frac{(x + 5) \cdot 18(x + 3)}{6(x + 3)} + \frac{(3x + 4) \cdot 18(x + 3)}{3(x + 3)} &= \frac{(2x + 11) \cdot 18(x + 3)}{9(x + 3)} && \left|\ \text{kürzen}\right. \\
3(x + 5) + 6(3x + 4) &= 2(2x + 11) && \left|\ \text{Klammern auflösen}\right. \\
3x + 15 + 18x + 24 &= 4x + 22 && \left|\ \text{zusammenfassen}\right. \\
21x + 39 &= 4x + 22 && \left|\ -4x;\ -39\ \text{(Variable auf eine Seite bringen)}\right. \\
17x &= -17 && \left|\ :17\ \text{(Variable isolieren)}\right. \\
x &= -1 \\
L &= \{-1\}
\end{aligned}
$$

Der Wert für x gehört zur Definitionsmenge.

Gehört der ermittelte Wert für x nicht zur Definitionsmenge, so gilt: L = { } (Die Lösungsmenge ist leer).

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 2

Exkurs: *Wie findet man den Hauptnenner?*

Das Finden des Hauptnenners ist oft der aufwendigste Schritt beim Lösen von Bruchgleichungen. Um den Hauptnenner mehrerer Bruchterme zu ermitteln, müssen die einzelnen Nenner mittels Termumformung in möglichst kleine Faktoren zerlegt werden. Dies soll an dem folgenden Beispiel gezeigt werden:

Es soll der Hauptnenner der beiden Bruchterme $\frac{1}{x - 1}$ und $\frac{2}{x^2 - x}$ ermittelt werden.

Nenner 1: $x - 1$ $x - 1$ lässt sich nicht weiter zerlegen
Nenner 2: $x^2 - x$ x kann ausgeklammert werden: $x^2 - x = x(x - 1)$. Eine weitere Zerlegung ist nicht möglich.
Der Hauptnenner lautet also: $x(x - 1)$. Mit seiner Hilfe können die beiden Nenner entfernt werden: $\frac{1\,(x(x - 1))}{x - 1} = x$ und $\frac{2(x(x - 1))}{x(x - 1)} = 2$.

Auch beim Finden des Hauptnenners können binomische Formeln eine Rolle spielen:
Bsp.: $\frac{9}{x + 2} - \frac{3}{x - 2} = \frac{2x + 5}{x^2 - 4}$
Nach der 3. binomischen Formel gilt: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Daher lautet der Hauptnenner $(x + 2)(x - 2)$:

$$\frac{9\,(x + 2)(x - 2)}{x + 2} - \frac{3\,(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \frac{(2x + 5)(x + 2)(x - 2)}{x^2 - 4} = 9\,(x - 2) - 3\,(x + 2) = 2x + 5$$

(Vgl. auch Eingangstest Aufgabe 1 g))

3 Quadratische Gleichungen

Auch quadratische Gleichungen werden uns im Mathematikunterricht der Fachoberschule öfter begegnen, insbesondere bei der Behandlung quadratischer Funktionen.

? *Was sind quadratische Gleichungen?*

> Definition: Die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **allgemeine Form der quadratischen Gleichung**.

Weil $a \neq 0$ ist, kann die Gleichung durch a dividiert werden und man erhält:

$$\underbrace{x^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{\frac{b}{a} \cdot x}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{\frac{c}{a}}_{\text{absolutes Glied}} = 0$$

Zur Vereinfachung werden die Koeffizienten umbenannt: $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$

> Definition: Die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ heißt **Normalform der quadratischen Gleichung**.

Beispiele:

Allgemeine Form	Normalform
$5x^2 + 20x - 15 = 0$	$x^2 + 4x - 3 = 0$
$\frac{x^2}{4} - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 8x + 4 = 0$
$(a^2 - 1)x^2 + mx + (a - 1)^2 = 0$ mit $a \neq 1$; $a \neq -1$	$x^2 + \frac{m}{a^2 - 1}x + \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1} = 0$ mit $a \neq 1$; $a \neq -1$

? *Wie kann man quadratische Gleichungen lösen?*

Da jede quadratische Gleichung in ihre Normalform umgeformt werden kann, genügt die Untersuchung von Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Bei den folgenden Spezialfällen vereinfachen sich die Lösungswege:

1. Fall: p = 0 und q = 0

Die Gleichung hat die Form $x^2 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x_{1,2} &= 0 \\ L &= \{0\} \end{aligned}$$

Die Gleichung $x^2 = 0$ hat die Doppellösung $x_1 = x_2 = 0$.

2. Fall: $p \neq 0$ und q = 0

Die Gleichung hat die Form $x^2 + p \cdot x = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + p \cdot x &= 0 \quad | \text{ausklammern} \\ x(x + p) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ oder $x + p = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = -p$

$L = \{0; -p\}$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 0 \\ x(x+6) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ oder $x + 6 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = -6$

$L = \{0; -6\}$

3. Fall: $p = 0$ und $q \neq 0$

Die Gleichung hat die Form $x^2 + q = 0$.

$$x^2 + q = 0 \qquad | -q$$

$$x^2 = -q$$

Die rechte Seite der Gleichung muss positiv sein, damit reelle Lösungen vorhanden sind.

$$x^2 = q$$

$$x^2 - q = 0 \qquad | \text{ 3. Binomische Formel anwenden}$$

$$(x + \sqrt{q})(x - \sqrt{q}) = 0$$

$$x + \sqrt{q} = 0 \quad \text{oder} \quad x - \sqrt{q} = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{q} \qquad x_2 = \sqrt{q}$$

$$L = \{-\sqrt{q}\,;\ \sqrt{q}\}$$

Beispiele:

1.
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 4$$
$$L = \{-4; 4\}$$

2.
$$x^2 + 16 = 0$$
Die 3. binomische Formel ist nicht anwendbar. Diese Gleichung hat keine reellen Lösungen.
$L = \{\ \}$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen (p-q-Formel):

4. Fall: $p \neq 0$ und $q \neq 0$

Die Gleichung hat die Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Die Lösungsformel (p-q-Formel) für die Normalform der quadratischen Gleichung lautet: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

ⓘ Diese Lösungsformel lässt sich ebenfalls allgemein herleiten. Wer an dieser Herleitung interessiert ist, bekommt sie von mir gezeigt!

Beispiel 1:

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$
$$p = 8;\ q = 15$$
$$x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm\sqrt{(\frac{8}{2})^2 - 15}$$
$$x_{1,2} = -4 \pm\sqrt{16 - 15}$$
$$x_{1,2} = -4 \pm\sqrt{1}$$
$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -5$$
$$L = \{-3; -5\}$$

Beispiel 2:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$p = 2;\ q = 1$$
$$x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{1 - 1}$$
$$x_{1,2} = -1 \pm 0$$
$$x_{1,2} = -1$$

$L = \{-1\}$ (eine doppelte Lösung)

Beispiel 3:

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$p = 2; q = 3$

$$x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{1-3}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{-2}$$

$$L = \{\ \}$$

Die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 3

? *Woran kann man erkennen, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat?*

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt vom Term $(\frac{p}{2})^2 - q$, der in der p-q-Formel unter der Wurzel steht, ab. Diesen Ausdruck nennt man auch **Diskriminante** und bezeichnet ihn mit D: $D = (\frac{p}{2})^2 - q$.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{D}$ mit $x \in R$ $\quad (D = (\frac{p}{2})^2 - q)$		
D = 0	**D > 0**	**D < 0**
$x_{1,2} = -\frac{p}{2}$ $L = \{-\frac{p}{2}\}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{D}$ $L = \{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\ ; -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{D}$ $L = \{\ \}$, da $\sqrt{D}$ keine reelle Zahl ist.
eine (doppelte) Lösung	zwei Lösungen	keine reellen Lösungen
siehe oben, Beispiel 2	siehe oben, Beispiel 1	siehe oben, Beispiel 3

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 3

4 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen haben Sie bereits in der Mittelstufe kennen gelernt. Auch im Mathematikunterricht der Fachoberschule müssen Sie solche Systeme aufstellen und lösen können, beispielsweise um Funktionsgleichungen anhand vorgegebener Daten zu ermitteln. Eine Wiederholung lohnt sich also!

? *Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem?*

Definition: Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem.
Lösungen dieses Gleichungssystems sind Zahlenpaare, die jede dieser Gleichungen erfüllen. Die Gesamtheit aller Lösungen bildet die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems.

Beispiel:

I	$4x - 5y$	=	-42
II	$6x + 7y$	=	24

ⓘ Es gibt auch Gleichungssysteme, die aus mehr als zwei Gleichungen mit mehr als zwei Variablen bestehen. Solche Systeme werden sie in der Fachoberschule kennen lernen.

? *Wie kann man lineare Gleichungssysteme lösen?*

Zum Lösen linearer Gleichungssysteme gibt es verschiedene Verfahren. Dabei ist allen rechnerischen Verfahren gemeinsam, dass versucht wird, durch Beseitigen (Eliminieren) einer der beiden Variablen das System aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf eine Gleichung mit einer Variablen zurückzuführen.

1. Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine der beiden Gleichungen nach einer der beiden Variablen auf und setzt den so erhaltenen Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.

Das Einsetzungsverfahren ist dann vorteilhaft, wenn (wenigstens) eine der beiden Gleichungen nach einer der beiden Variablen aufgelöst ist bzw. leicht dahingehend umgeformt werden kann.

Beispiel:

I $y = -x + 2$
II $4x + 3y = 2$

einsetzen

I in II einsetzen $4x + 3y = 2$ $y = -x + 2$

$$4x + 3(-x + 2) = 2$$
$$4x - 3x + 6 = 2$$
$$\underline{x = -4}$$

Der y-Wert wird bestimmt, indem man den berechneten x-Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzt:

$y = -x + 2$
$y = -(-4) + 2$
$\underline{y = 6}$

Lösung des Gleichungssystems ist also :

$$L = \{(-4; 6)\}$$

oder geometrisch betrachtet der Schnittpunkt S(-4/6).

2. Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die beiden erhaltenen Terme gleich.

Das Gleichsetzungsverfahren ist immer dann sinnvoll, wenn beide Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst vorliegen bzw. leicht dahingehend umgeformt werden können.

Beispiel:

I $\quad y = -\frac{1}{2}x + 2$
II $\quad y = 2x - 3$

I und II gleichsetzen

$$
\begin{aligned}
y &= y \\
-\tfrac{1}{2}x + 2 &= 2x - 3 \quad \vert -2x \\
-2\tfrac{1}{2}x + 2 &= -3 \quad \vert -2 \\
-2\tfrac{1}{2}x &= -5 \quad \vert : (-2\tfrac{1}{2}) \\
\underline{x} &\underline{= 2}
\end{aligned}
$$

Der dazugehörige y-Wert ergibt sich, indem man den berechneten x-Wert in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzt :

$$y = 2 \cdot x - 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = \underline{1}$$

Welche Funktionsgleichung zur Berechnung des y-Wertes gewählt wird, ist natürlich unerheblich, da ja die beiden y-Werte im Schnittpunkt für beide Geraden identisch sind. Lösung des Gleichungssystems ist also L = {(2; 1)}
oder geometrisch betrachtet der Schnittpunkt S(2/1).

3. Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren formt man eine der beiden Gleichungen so um, dass bei der Addition der beiden Gleichungen eine der beiden Variablen wegfällt.

Das Additionsverfahren ist immer dann zweckmäßig, wenn die Koeffizienten einer Variablen in beiden Gleichungen zueinander entgegengesetzte Zahlen sind.

Beispiel 1:

I $\quad x + 2y = 4$
II $\quad 2x - 2y = 2$

I + II wird

$$
\left.\begin{aligned}
x + 2y &= 4 \\
2x - 2y &= 2
\end{aligned}\right\} +
$$

$$
\begin{aligned}
3x \quad &= 6 \quad \vert : 3 \\
\underline{x \quad} &\underline{= 2}
\end{aligned}
$$

Durch die Addition der beiden Gleichungen eine Variable (hier y) eliminiert.

Der y-Wert wird wiederum bestimmt, indem man den berechneten x-Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzt :

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 4 \\
2 + 2y &= 4 \\
2y &= 2 \\
\underline{y} &\underline{= 1}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt : L = {(2; 1)} bzw. S(2/1)

Beim Additionsverfahren soll durch Addition der beiden Gleichungen eine Variable eliminiert werden. Ist dies nicht unmittelbar möglich, werden zuvor die Gleichungen des Systems mit geeigneten Zahlen multipliziert.

Beispiel 2:

I $-3x + 2y = 1$
II $4x + 5y = -9$

Damit y eliminiert werden kann :

$$-3x + 2y = 1 \quad | \cdot (-5)$$
$$4x + 5y = -9 \quad | \cdot 2$$

$$\left.\begin{array}{r} 15x - 10y = -5 \\ 8x + 10y = -18 \end{array}\right\} +$$

$$23x = -23 \quad | : 23$$
$$\underline{x = -1}$$

x = -1 in die Gleichung I eingesetzt führt zu :

$$-3x + 2y = 1$$
$$3 + 2y = 1$$
$$2y = -2$$
$$\underline{y = -1}$$

Daraus folgt: L = {(-1; -1)} bzw. S(-1/-1)

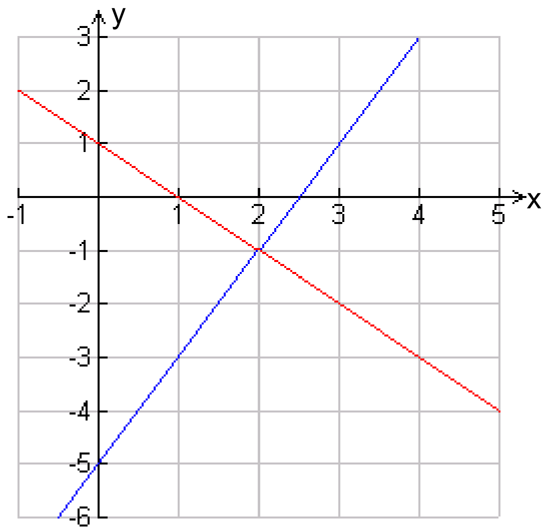
4. Grafisches Lösen

Die Gleichungen des Systems werden als Gleichungen zweier linearer Funktionen aufgefasst. Diese Funktionen werden grafisch dargestellt. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden sind die Lösungen des entsprechenden Gleichungssystems. Dabei ist zu beachten, dass es sich meist nur um eine näherungsweise Lösung handelt. Exakte Lösungen können so nur in den wenigsten Fällen gefunden werden.

Beispiel:

I $y = 2x – 5$
II $y = -x + 1$

Die grafische Darstellung sieht folgendermaßen aus :



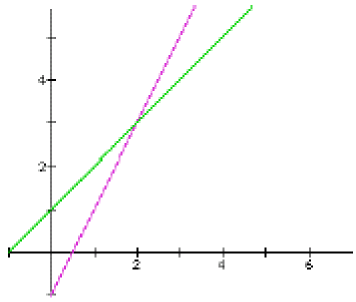
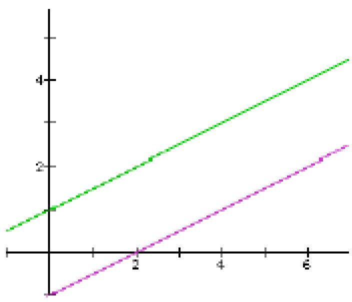
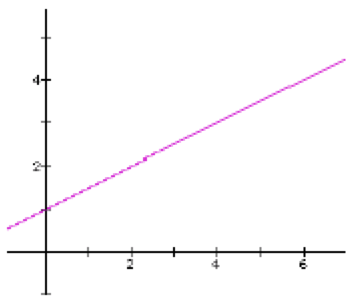
Die grafische Darstellung zeigt, dass beide Graphen einander in S(2/-1) schneiden. Dieses Zahlenpaar ist somit die Lösung des Gleichungssystems:

$$L = \{(2; -1)\}$$

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 4

? *Wie viele Lösungen kann ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen haben?*

Bei linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen können 3 Fälle eintreten:

I $y = 2x - 1$ II $y = x + 1$	I $2y = x - 2$ II $x = 2y - 2$	I $2y - 2 = x$ II $y = 0{,}5x + 1$
		
Die Geraden schneiden sich: 1 Lösung.	Die Geraden sind parallel: keine Lösung.	Die Geraden fallen zusammen: unendlich viele Lösungen.
Beim Auflösen der Gleichungssysteme geschieht Folgendes:		
I $y = 2x - 1$ II $y = x + 1 \mid \cdot (-1)$	I $2y = x - 2$ II $x = 2y - 2$	I $2y - 2 = x$ II $y = 0{,}5x + 1$
III $x = 2$ IV $y = 3$ $L = \{(2, 3)\}$	III $0 = 4$ Falsche Aussage $L = \{\ \}$	III $0 = 0$ Wahre Aussage $L = \{(x,y) \mid y=0{,}5x + 1\}$*
genau eine Lösung	**keine Lösung**	**unendlich viele Lösungen**

*Hinweis zur Schreibweise: $L = \{(x,y) \mid y=0{,}5x + 1\}$ bedeutet in Worten: „Die Lösungsmenge besteht aus allen Zahlenpaaren (x,y) mit der Eigenschaft $y = 0{,}5x + 1$, d. h., die Zahlenpaare erfüllen diese Gleichung."

? *Wie kann man an Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen herangehen?*

Die Vorgehensweise des mathematischen Modellierens wird anhand eines Beispiels erläutert:

Beispiel:
In einem Verein sind 238 stimmberechtigte Mitglieder. Über einen Antrag wird eine Abstimmung durchgeführt, der mit 90 Stimmen Mehrheit angenommen wird. Es sind keine Stimmenthaltungen erlaubt. Wie viele Ja-Stimmen bzw. Nein-Stimmen wurden abgegeben?

Lösung:
Der Text muss in ein mathematisches Modell umgesetzt werden:
Festlegung der Variablen:
x sei die Anzahl der Ja-Stimmen; y sei die Anzahl der Nein-Stimmen
Umsetzung der Informationen:
In einem Verein sind 238 stimmberechtigte Mitglieder. ⇒ I $x + y = 238$
… mit 90 Stimmen Mehrheit angenommen … ⇒ II $x - y = 90$
→ Das aufgestellte lineare Gleichungsverfahren kann nun nach einer der oben angegebenen Verfahren gelöst werden. Anschließend muss die Lösung noch interpretiert werden. Dazu schreibt man einen Antwortsatz:
Es wurden 164 Ja-Stimmen und 74 Nein-Stimmen abgegeben.

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 4

5 Funktionen

Der Funktionsbegriff ist einer der zentralen Begriffe der Mathematik. Auch im Mathematikunterricht der Fachoberschule spielt er eine herausragende Rolle. Das „Arbeiten mit Funktionen" stellt hier den Großteil der Tätigkeiten dar.

Sie haben den Funktionsbegriff und einige Funktionsarten bereits in der Mittelstufe kennen gelernt. Insbesondere die linearen und quadratischen Funktionen werden im Folgenden wiederholt und vertieft.

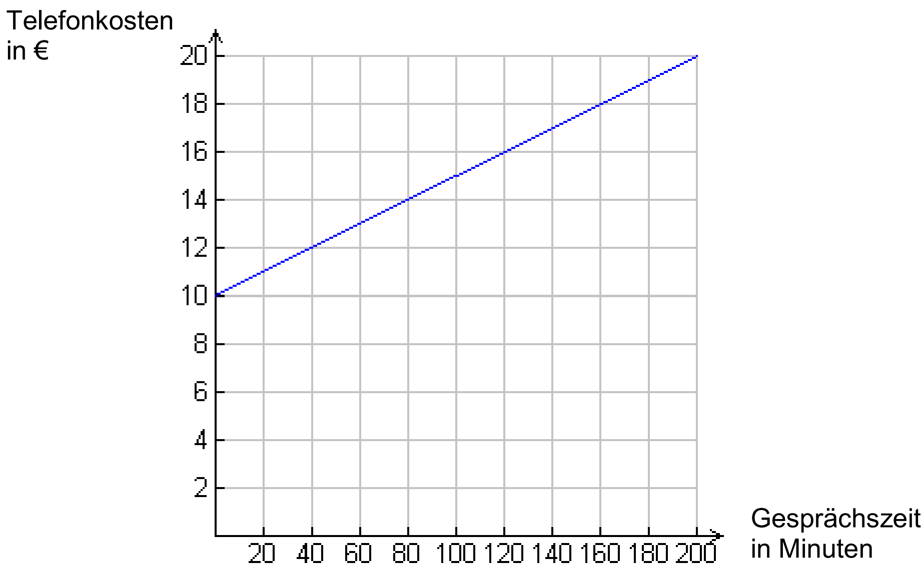
5.1 Lineare Funktionen

Was ist eine lineare Funktion?

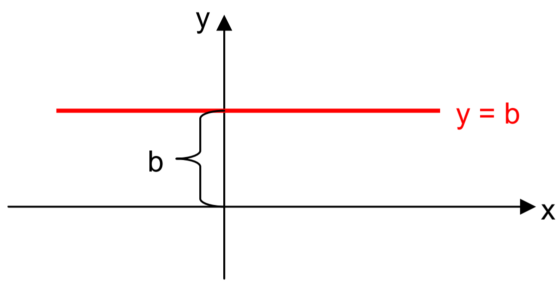
Definition: Eine Funktion mit einer Gleichung der Form $y = m \cdot x + b$ ($m, b \in R$) oder einer solchen, die durch äquivalentes Umformen in diese Form überführt werden kann, heißt **lineare Funktion**. Als Definitionsbereich einer linearen Funktion wird meist die Menge der reellen Zahlen gewählt.

Mit Hilfe linearer Funktionen lassen sich viele Sachverhalte aus dem „wirklichen Leben" mathematisch darstellen.

Beispiel:
Eine Telefongesellschaft wirbt mit folgendem Angebot:
Monatsgrundpreis: 10 €
Kosten für eine Gesprächsminute im Inland: 0,05 €
Dieser Sachverhalt lässt sich auch als Gleichung darstellen: $y = 0{,}05\text{ €} \cdot x + 10\text{ €}$
Diese lineare Funktion lässt sich auch grafisch darstellen:



Eine Funktion der Form $y = b$, d. h. $y = mx + b$ mit $m = 0$ heißt **konstante Funktion**. Der Graph einer konstanten Funktion mit $y = b$ ist eine Parallele zur x-Achse mit Abstand m.



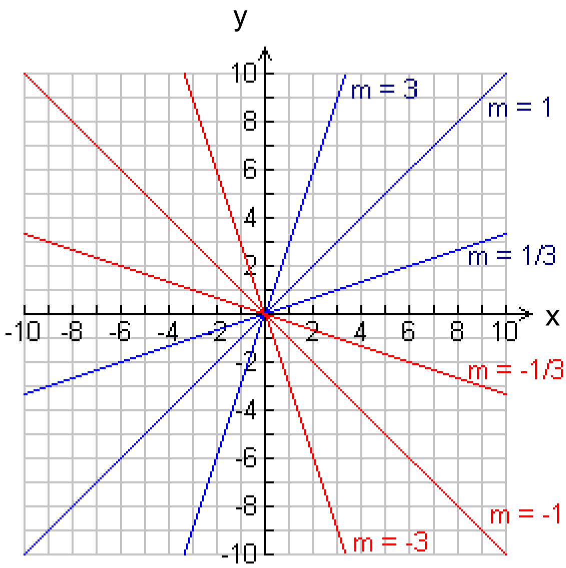
Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Wie wirken sich die einzelnen Teile des Funktionsterms (m und b) auf den Verlauf des Graphen der Funktion aus?

1. Wie wirkt m?

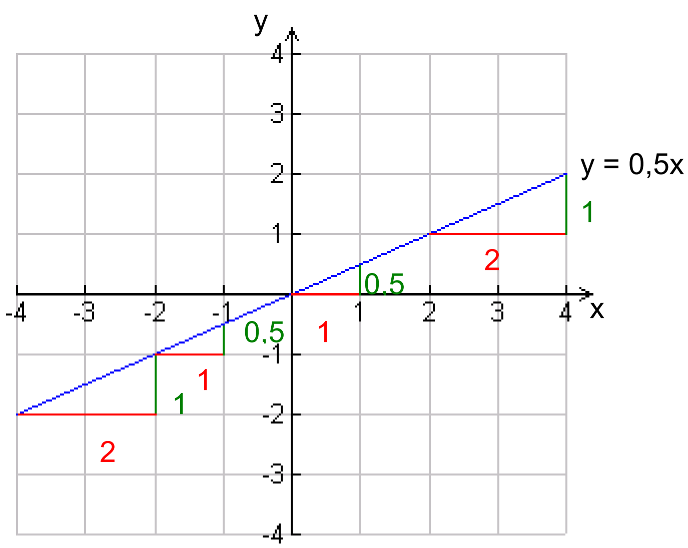
Zur Beantwortung wird in die Funktionsgleichung für b Null eingesetzt und für m unterschiedliche Zahlen.

$y = mx$



m gibt die Steigung der Geraden an. Für m > 0 steigt die Gerade und für m < 0 fällt die sie. Je größer m ist, desto steiler verläuft die Gerade.

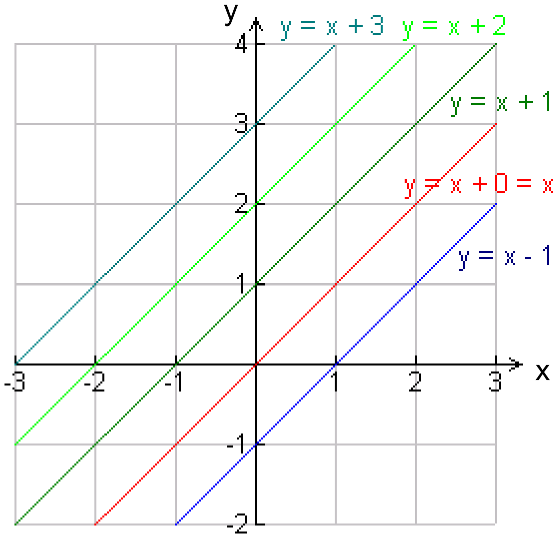
Die Steigung kann man durch ein rechtwinkliges Dreieck an der Gerade, das sogenannte **Steigungsdreieck**, darstellen. Man kann es in beliebiger Größe und an beliebiger Stelle zeichnen sowie entlang des Graphen verschieben:



2. Wie wirkt b?

Zur Beantwortung wird jetzt m konstant gehalten (m = 1) und b variiert.
b gibt an, wo die y-Achse geschnitten wird. D. h. b verschiebt den Graphen in y-Richtung.

Beispiele:
y = x + b



Zusammenfassung: Der Graph der Funktion y = mx + b ist eine Gerade mit der Steigung m, die y-Achse wird bei b geschnitten.

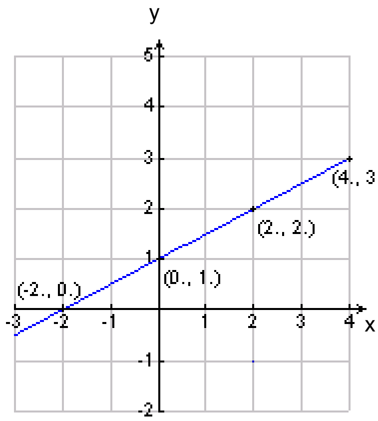
? *Wie kann man den Graphen einer linearen Funktion zeichnen?*

Die einfachste Möglichkeit, den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen, ist das Verwenden von Werten aus einer Wertetabelle. Dabei sollte man günstige, d. h. leicht errechenbare Werte nutzen.

Beispiel:

Gleichung: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Graph:



Wertetabelle:

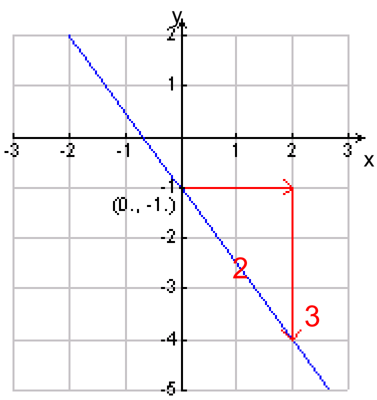
x	-2	0	2	4
y	0	1	2	3

Außerdem kann man auch ein Steigungsdreieck und den Schnittpunkt mit der y-Achse (0 / b) nutzen.

Beispiel:

Der Graph zu $y = -\frac{3}{2}x - 1$ ist zu zeichnen.

Der Punkt (0 / -1) ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Von diesem Punkt aus wird das Steigungsdreieck (um 2 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach unten) angetragen.



Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 5

5.2 Quadratische Funktionen

?

Was ist eine quadratische Funktion?

Definition: Eine Funktion mit einer Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$) oder einer solchen, die durch äquivalentes Umformen in diese Form überführt werden kann, heißt **quadratische Funktion**.
$a \cdot x^2$ heißt quadratisches Glied,
$b \cdot x$ heißt lineares Glied,
c heißt konstantes oder absolutes Glied.

(Vgl. hierzu auch Abschnitt 3 „Quadratische Gleichungen“)

?

Wie sehen die Graphen quadratischer Funktionen aus?

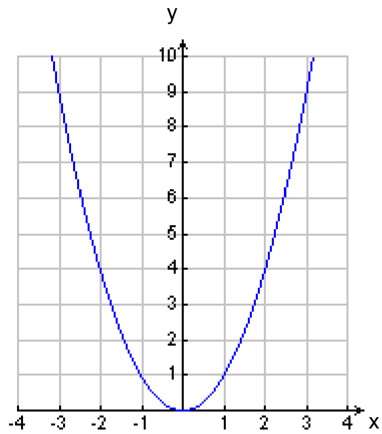
Definition: Den Graphen der quadratischen Funktion nennt man **Parabel**. Der Punkt mit dem größten bzw. kleinsten Funktionswert der quadratischen Funktion nennt man **Scheitelpunkt** der Parabel.

<u>Beispiel</u>:
Die einfachste quadratische Funktion hat die Gleichung $y = x^2$. Das ist der Sonderfall der quadratischen Funktion für a = 1, b = 0 und c = 0. Der Graph heißt **Normalparabel**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Eigenschaften der Normalparabel für die Funktion mit $y = x^2$:

- Die Kurve ist „nach oben“ geöffnet.
- Die Kurve berührt die x-Achse im Koordinatenursprung.
- Die y-Achse ist Symmetrieachse der Kurve.
- Der Punkt P(0 / 0) heißt Scheitelpunkt der Normalparabel.

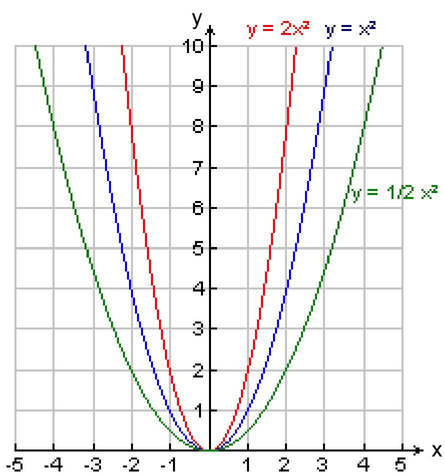


Diese Normalparabel kann auf unterschiedliche Art verändert werden: Sie kann gestaucht, gestreckt, gespiegelt und im Achsenkreuz verschoben werden.

Stauchung und Streckung
Der Graph für $y = a \cdot x^2$ ist für a = 1 die Normalparabel. Der Parameter a bewirkt eine Stauchung oder Streckung der Parabel, wenn a > 0 ist.
$0 < a < 1$ Parabel wird gestaucht.
$a > 1$ Parabel wird gestreckt.

<u>Beispiele</u>:

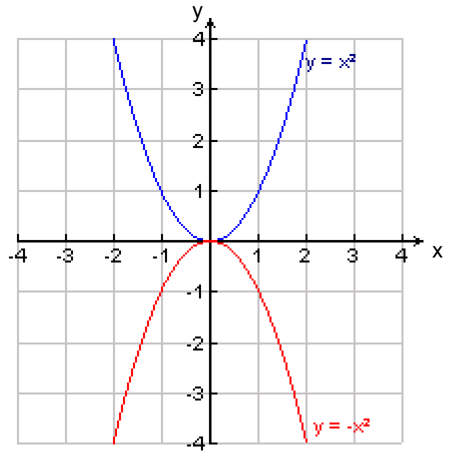
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = ½ x^2$	2	½	0	½	2



Spiegelung
Graphen der Funktionen mit $y = a \cdot x^2$ entstehen durch Spiegelung an der x-Achse, wenn $a < 0$ ist.
Der Graph der Funktion mit $y = -x^2$ ist eine Normalparabel.

Beispiel:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

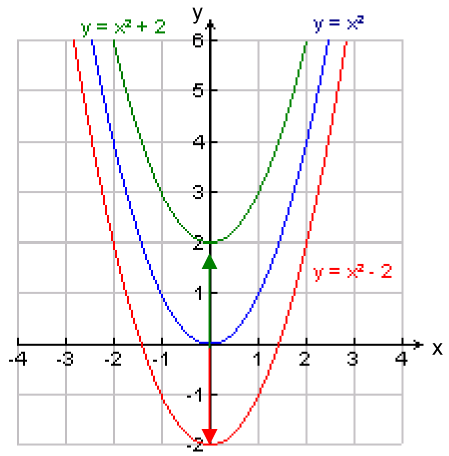


Verschiebung der Normalparabel längs der y-Achse
Zur Funktion mit $y = x^2$ gehört der Graph mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung.
Bei $y = x^2 + c$ ($c \in R$) wird zu jedem Funktionswert $y = x^2$ der Betrag von c addiert oder subtrahiert, je nachdem ob c positiv oder negativ ist. Der Graph der Funktion $y = x^2 + c$ entsteht durch Verschiebung der Normalparabel entlang der y-Achse. Ansonsten ändert sich an der Gestalt der Normalparabel nichts.

$c > 0$ Verschiebung entlang der y-Achse nach oben.
$c < 0$ Verschiebung entlang der y-Achse nach unten.

Beispiel:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2
$y = x^2 + 2$	6	3	2	3	6

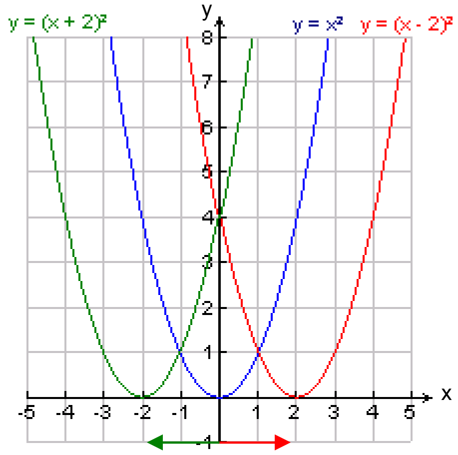


Verschiebung der Normalparabel längs der x-Achse
Wird die Normalparabel zu $y = x^2$ in Richtung der negativen x-Achse um den Wert d verschoben, so hat der Scheitelpunkt S die Koordinaten S(-d / 0) und die Parabel die Gleichung $y = (x + d)^2$.

$d < 0$ Verschiebung der Parabel $y = x^2$ entlang der x-Achse in positiver Richtung
$d > 0$ Verschiebung der Parabel $y = x^2$ entlang der x-Achse in negativer Richtung

Beispiel:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = (x - 2)^2$	16	9	4	1	0
$y = (x + 2)^2$	0	1	4	9	16



Die verschiedenen Veränderungen der Funktionsgraphen gegenüber der Normalparabel können natürlich auch gleichzeitig stattfinden. Man hat dann die Funktionsgleichung $y = a \cdot (x - d)^2 + c$.

Beispiel:

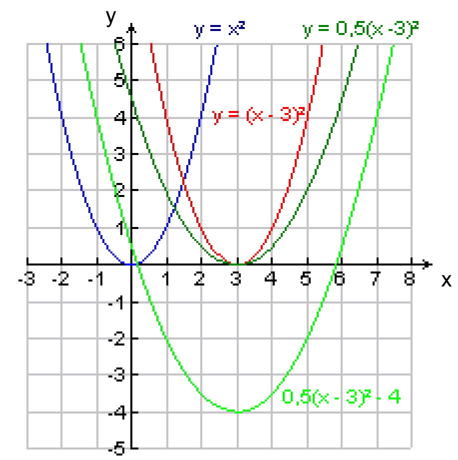
$y = 0,5 \cdot (x - 3)^2 - 4$

Wir denken uns den Graphen schrittweise aus der Normalparabel entstanden.

(1) Zuerst wird die Normalparabel um 3 Einheiten nach rechts verschoben und man erhält den Graphen von $y = (x - 3)^2$.

(2) Nun wird die Parabel mit dem Faktor 0,5 gestreckt und man erhält den Graphen von $y = 0,5(x - 3)^2$.

(3) Schließlich verschiebt man die Parabel noch um 4 Einheiten nach unten und erhält $y = 0,5(x - 3)^2 - 4$.



Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 6

Die Form $y = a \cdot (x - d)^2 + c$ wird auch **Scheitelpunktform** der quadratischen Funktion genannt. Aus dieser Gleichung kann direkt der Scheitelpunkt abgelesen werden: Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (d / c).

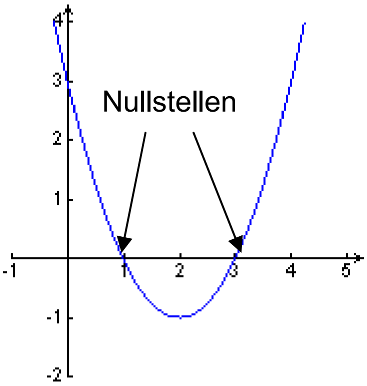
Beispiele:

Scheitelpunktform	**Scheitelpunkt**
$y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$	S(3 / 2)
$y = -0,5(x + 2)^2 - 3$	S(-2 / -3)
$y = 0,25(x - 4)^2$	S(4 / 0)
$y = -3x^2 + 2$	S(0 / 2)
$y = 3(x + 1)^2 + 3$	S(-1 / 3)

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 6

? *Was sind Nullstellen quadratischer Funktionen und wie ermittelt man diese?*

Definition: Eine Stelle x, an der eine Funktion den Wert 0 annimmt, heißt **Nullstelle** der Funktion. Für eine Nullstelle der Funktion gilt: y = 0.



Man errechnet die Nullstelle, indem man die Funktionsgleichung gleich Null setzt.

Beispiel:
$y = x^2 - 2x - 3$
$y = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung gibt die Nullstellen an. Wie man eine solche Gleichung löst, finden Sie im Abschnitt 3 „Quadratische Gleichungen“ (Stichwort „p-q-Formel“).

Zugehörige Übungsaufgaben finden Sie auf Arbeitsblatt Nr. 6